●漸化式を満たす数列の空間

数列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ において，隣り合う 2 項を加えるとその次の項が得られるという関係が常に成り立っているとしよう．すなわち，$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ は漸化式

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

を満たす数列である．このうち初めの 2 項が $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ であるものは**フィボナッチ数列**と呼ばれ，様々な分野で現れることが知られている．初めの数項を漸化式を用いて求めてみると，0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... となる．

ところで，上の漸化式を満たす数列はフィボナッチ数列以外にどのようなものがあるだろうか．また，その一般項はどのようなものだろうか．

より一般的に考察するために $a_1, a_2 \in \mathbf{C}$ とし，漸化式

$$x_{n+2} + a_1 x_{n+1} + a_2 x_n = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{$*$}$$

を満たす複素数の数列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = \{x_0, x_1, x_2, \cdots\}$ を考える．このような数列は実際には $x_0, x_1 \in \mathbf{C}$ を任意に定め，$n \geqq 2$ に対しては $(*)$ を用いて次々と x_n をきめていくことで構成することができる．例えば $x_0 = 1$, $x_1 = 0$ とすると

$$x_2 = -(a_1 x_1 + a_2 x_0) = -a_2, \quad x_3 = -(a_1 x_2 + a_2 x_1) = a_1 a_2, \ \cdots .$$

このように続けていけばどんな n に対しても x_n が（帰納的に）求まることになる．いまこの数列を $\boldsymbol{e}_1$ とおこう．x_0, x_1 の値を変えれば別の数列が得られるが，例えば $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ としたときの数列を $\boldsymbol{e}_2$ とおく．$\boldsymbol{e}_2$ の引き続く項は

$$x_2 = -(a_1 x_1 + a_2 x_0) = -a_1, \quad x_3 = -(a_1 x_2 + a_2 x_1) = {a_1}^2 - a_2, \ \cdots$$

である．

ここで数列の演算に関する基本的事項について述べておく．

2 つの数列 $\boldsymbol{x} = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\boldsymbol{y} = \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して一般項が $x_n + y_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ である数列を $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の和と呼び，$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ と書く．また，$\boldsymbol{x} = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ と複素数 c に対して一般項が $c x_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ である数列を $\boldsymbol{x}$ の c 倍と呼び，$c\boldsymbol{x}$ と書く．

補題 1. $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, c は上記の通りとする．
(1) $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ がともに $(*)$ を満たせば $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ も $(*)$ を満たす．
(2) $\boldsymbol{x}$ が $(*)$ を満たせば $c\boldsymbol{x}$ もやはり $(*)$ を満たす．

証明. (1) についてのみ記すと，

$$\begin{cases} x_{n+2} + a_1 x_{n+1} + a_2 x_n = 0 \\ y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_2 y_n = 0 \end{cases} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

だから辺々加えて

$$(x_{n+2} + y_{n+2}) + a_1(x_{n+1} + y_{n+1}) + a_2(x_n + y_n) = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

すなわち $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ も $(*)$ を満たす． □

漸化式 $(*)$ を満たす複素数の数列全体を V とおく．補題 1 から，V に属する数列どうしの和はやはり V に属し，V に属する数列の複素数倍もやはり V に属すことがわかる．言い換えれば，V には和および複素数倍という 2 つの演算が存在する．詳細は略すが，これらの演算に関して V は $\mathbf{C}$ 上のベクトル空間になることが確かめられる．

V の基底を 1 組求めてみよう．$\boldsymbol{x}$ は $(*)$ を満たす数列で，初めの 2 項が α, β であるとする．補題 1 から数列 $\alpha\boldsymbol{e}_1 + \beta\boldsymbol{e}_2$ も漸化式 $(*)$ を満たし，その初めの 2 項は明らかに α, β である．$(*)$ を満たす数列のすべての項は初めの 2 項だけからきまることを思い出そう．$\alpha\boldsymbol{e}_1 + \beta\boldsymbol{e}_2$ と $\boldsymbol{x}$ は初めの 2 項が共通だから，両者は実は同じ数列であることがわかる：$\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{e}_1 + \beta\boldsymbol{e}_2$．しかも $\boldsymbol{x}$ をこのように $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ の 1 次結合で表す仕方はもちろん一意的である．よって，V の 1 組の基底として $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ がとれる（特に $\dim V = 2$）．

$\boldsymbol{x} = \{x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ に対してその初項を取り除いて得られる数列を $\boldsymbol{x}'$ とおく：

$$\boldsymbol{x}' = \{x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\}.$$

$\boldsymbol{x}$ が漸化式 $(*)$ を満たせば，明らかに $\boldsymbol{x}'$ も $(*)$ を満たす．すなわち，$\boldsymbol{x} \in V$ なら $\boldsymbol{x}' \in V$ である．そこで，写像 $f : V \to V$ を $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}'$ により定めると，f は V の線形変換となる．実際，$\boldsymbol{x} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$，$\boldsymbol{y} = \{y_0, y_1, y_2, \ldots\}$ に対して

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) &= (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})' = \{x_1 + y_1,\ x_2 + y_2, \ldots\} \\ &= \{x_1, x_2, \ldots\} + \{y_1, y_2, \ldots\} = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{y}' \\ &= f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}) \end{aligned}$$

であり，また

$$f(c\boldsymbol{x}) = (c\boldsymbol{x})' = \{cx_1, cx_2, \ldots\} = c \cdot \{x_1, x_2, \ldots\} = c\boldsymbol{x}' = cf(\boldsymbol{x}).$$

$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ の f による像はそれぞれ

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{e}_1) &= {\boldsymbol{e}_1}' = \{0, -a_2, \ldots\} = -a_2\boldsymbol{e}_2 \\ f(\boldsymbol{e}_2) &= {\boldsymbol{e}_2}' = \{1, -a_1, \ldots\} = \boldsymbol{e}_1 - a_1\boldsymbol{e}_2 \end{aligned}$$

だから，基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ に関する f の表現行列 B は

$$(f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2)) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}.$$

B の固有多項式は $|tE - B| = t^2 + a_1 t + a_2$ である．f の固有値と B の固有値は一致するから，f の固有値を求めるには B の固有方程式 $|tE - B| = 0$ を解けばよい．

さて，$\boldsymbol{x} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\} \in V$ を f の固有ベクトルとする：$f(\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{x}$．このとき

$$f(\boldsymbol{x}) = \{x_1, x_2, \ldots\}, \quad \lambda\boldsymbol{x} = \{\lambda x_0, \lambda x_1, \ldots\}$$

だから $n = 1, 2, \ldots$ に対して $x_n = \lambda x_{n-1}$．よって，$\boldsymbol{x}$ は初項 x_0, 公比 λ の等比数列である：$\boldsymbol{x} = \{x_0, \lambda x_0, \lambda^2 x_0, \ldots\} = x_0\boldsymbol{u}$．ただし，$\boldsymbol{u} = \{1, \lambda, \lambda^2, \ldots\} = \{\lambda^n\}_{n=0}^{\infty}$ とおいた．

もちろん $f(\boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{u}$ だから，f が固有値 λ をもつとき，f の固有ベクトルとして初項 1，公比 λ の等比数列がとれる．相異なる固有値に属する固有ベクトルは 1 次独立であり，V は 2 次元だから，もし f が異なる 2 つの固有値 λ, μ をもてば，V は f の固有ベクトルからなる基底 $\{\lambda^n\}_{n=0}^{\infty}, \{\mu^n\}_{n=0}^{\infty}$ をもつ．このとき $(*)$ を満たす数列 $\boldsymbol{x} = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ は $\{\lambda^n\}_{n=0}^{\infty}$ と $\{\mu^n\}_{n=0}^{\infty}$ の 1 次結合である．したがって，n によらない定数 α, β を用いて

$$x_n = \alpha\lambda^n + \beta\mu^n \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

と表される．

例 1 (フィボナッチ数列の一般項). 漸化式 $(*)$ において $a_1 = a_2 = -1$ とすると

$$|tE - B| = t^2 - t - 1 = \Big(t - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)\Big(t - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)$$

だから，フィボナッチ数列の一般項は 2 つの定数 α, β を用いて

$$x_n = \alpha\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n + \beta\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

と表される．ここで $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ より

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \beta\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

これより $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\beta = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ であることがわかるから，

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big\{\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n\Big\} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

注意 1. 固有多項式 $|tE - B| = t^2 + a_1 t + a_2$ が重根 λ をもつときは，線形変換 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}'$ の固有ベクトルは $\{\lambda^n\}_{n=0}^{\infty}$ の定数倍のみで，したがって V は f の固有ベクトルからなる基底をもつことができない．ただし，広義の固有ベクトルと呼ばれるものからなる基底は存在する．いまの場合そのような基底として $\{\lambda^n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{n\lambda^n\}_{n=0}^{\infty}$ がとれるので，一般項は定数 α, β を用いて $x_n = (\alpha + \beta n)\lambda^n \ \ (n = 0, 1, 2, \dots)$ と書くことができる．

一般に，$k+1$ 項間の漸化式

$$x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + \cdots + a_k x_n = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \dots) \qquad (\circ)$$

を満たす数列の全体 V は k 次元ベクトル空間となる．$(\circ)$ を満たす数列は初めの k 項を与えることで定まるから，V に属する数列 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_k$ を

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 &= \{1,\, 0,\, 0,\, \dots,\, 0, \dots\} \\ \boldsymbol{e}_2 &= \{0,\, 1,\, 0,\, \dots,\, 0, \dots\} \\ &\ \,\vdots \qquad\qquad \vdots \\ \boldsymbol{e}_k &= \{\underbrace{0,\, 0,\, \dots,\, 0,\, 1}_{k\text{ 項}}, \dots\} \end{aligned}$$

によって定めることができるが，このとき $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ は V の 1 組の基底となる．初項を取り除く V の線形変換をここでも f で表すことにして，基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ に関する f の表現行列 B を求めてみよう．初めの k 項がわかっていれば漸化式 (○) より第 $k+1$ 項もわかるから，$\boldsymbol{e}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ の初めの $k+1$ 項は次のようになることがわかる：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1 &= \{1,\, 0,\, 0,\, \ldots,\, 0, -a_k,\, \ldots\} \\
\boldsymbol{e}_2 &= \{0,\, 1,\, 0,\, \ldots,\, 0, -a_{k-1},\, \ldots\} \\
&\ \ \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\
\boldsymbol{e}_k &= \{0,\, 0,\, \ldots,\, 0,\, 1, -a_1,\, \ldots\}
\end{aligned}$$

これらの初項を取り除いたものを $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ の 1 次結合で表してみると，

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{e}_1) &= \{0,\, 0,\, \ldots,\, 0, -a_k,\, \ldots\} &&= -a_k \boldsymbol{e}_k \\
f(\boldsymbol{e}_2) &= \{1,\, 0,\, \ldots,\, 0, -a_{k-1},\, \ldots\} &&= \boldsymbol{e}_1 - a_{k-1}\boldsymbol{e}_k \\
&\ \ \vdots && \ \ \vdots \\
f(\boldsymbol{e}_k) &= \{0,\, \ldots,\, 0,\, 1, -a_1,\, \ldots\} &&= \boldsymbol{e}_{k-1} - a_1 \boldsymbol{e}_k
\end{aligned}$$

したがって，f のこの基底に関する表現行列は

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_k & \cdots & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}$$

である．

B の固有多項式について，$|tE - B| = t^k + a_1 t^{k-1} + \cdots + a_k$ が成り立つことが示せる．いま，B が相異なる k 個の固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ をもつとしよう．すると，3 項間の漸化式の場合と同様にして，$\{{\lambda_1}^n\}_{n=0}^{\infty}, \ldots, \{{\lambda_k}^n\}_{n=0}^{\infty}$ が V の 1 組の基底となることがわかる．よって，与えられた漸化式を満たす数列の一般項は，n によらない定数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ を用いて

$$x_n = \alpha_1 {\lambda_1}^n + \cdots + \alpha_k {\lambda_k}^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

と表される．

なお，固有多項式が重根をもつ場合はやはり広義の固有ベクトルを用いることで数列の一般項を求めることができる．このあたりの事情はジョルダン標準形の知識があればすっきり理解することができる．